

Prima la matematica, dopo la musica

Wim Hutter

In de jaren dat ik als adviseur bij het CWI was betrokken, heb ik met Jan Karel Lenstra natuurlijk over tal van bestuurlijke vragen gediscussieerd. Vaak echter vonden wij dan ook nog de gelegenheid om over onze gemeenschappelijke passie – de muziek – te praten. De parafrase van een zinsnede uit de opera *Capriccio* van Richard Strauss die ik als titel van dit stukje heb gebruikt was hier beslist van toepassing!

Er is een verband tussen wiskunde en muziek. Leibniz merkte al op dat muziek het genoeg is dat de menselijke geest ervaart uit verborgen sommen, zonder te beseffen dat het om sommen gaat. Er zijn fascinerende verbindingen tussen de wiskunde, de wetenschap die patronen en structuren bestudeert, en de muziek, die gecomponeerd is binnen een structuur en (ritmische en harmonische) patronen vertoont.

Ritme als periodiek element in de muziek is al heel oud; in de muziek van “primitieve” volken is het ritme overheersend terwijl toonhoogte vrijwel kan ontbreken. In moderne tijden zijn sommige componisten hiernaar teruggekeerd: de “clapping games” van Steve Reich zijn daar een mooi voorbeeld van.

Pythagoras

De Grieken rekenden de muzikale evenals de meetkunde, rekenkunde en sterrenkunde tot de mathematische wetenschappen; in latere tijden werden deze wetenschappen gezamenlijk wel het “quadrivium” genoemd. De muziek werd door hen kwantitatief onderzocht, al in de 6^e eeuw v.Chr. diepgaand door Pythagoras. Een belangrijke notie is dat de tonen van het octaaf in de Griekse muziek (met een toonladder van vijf tonen) kunnen worden uitgedrukt in *fracties*. Als A de grondtoon is dan is de eerstvolgende toon met een snaarlengte van $\frac{4}{5}$ (ofwel $\frac{5}{4}$ maal de frequentie van de A) een C, $\frac{3}{4}$ is een D, $\frac{2}{3}$ een E en $\frac{3}{5}$ een F, terwijl $\frac{1}{2}$ een A, een octaaf hoger is. Het spel met deze fracties (en fracties van fracties) kan worden voortgezet waardoor de in de westerse muziek zo vertrouwde diatonische toonladder van 12 tonen ontstaat. De Grieken hechtten grote waarde aan het feit dat alle harmonieën op deze wijze met eenvoudige getallen (2, 3, 4 en 5) zijn te beschrijven. Strikte toepassing van de Pythagoreïsche ratio's leidt evenwel tot een toonladder waarin bepaalde intervallen heel consonant zijn terwijl andere juist “schuren”. Een probleem dat voor toetsinstrumenten pas

in de 18^e eeuw is opgelost door de “gelijkzwevende stemming”, waarbij de “pijn” gelijkelijk tussen de tonen van de toonladder is uitgesmeerd; alle intervallen klinken vals, maar zo weinig dat dat vrijwel onhoorbaar is. Als ik mijn clavecimbel in deze stemming stem, zal ik dat doen in kwinten, waarbij elke kwint een minieme zweving heeft. De tekortkoming in het Pythagoreïsche stemstelsel blijkt ook uit het feit dat een stemming in zuivere kwinten die na 12 keer weer de grondtoon, maar dan zeven octaven hoger, zou moeten opleveren, iets te hoog klinkt (ongeveer 74/73^e te hoog), een verschil dat de *komma* van Pythagoras wordt genoemd en dat door alle kwinten iets te krap te stemmen wordt “weggemasseerd”.

Componisten en getallen

Getallen kunnen in muziekstukken een belangrijke rol spelen als symbolen. In Mozarts Zaubерflöte bijvoorbeeld speelt het maçonnieke getal drie een belangrijke rol. De ouverture opent met drie akkoorden (die de bij de vrijmetselaren gebruikelijke drie kloppen op de deur laten horen – in dit geval natuurlijk Tamino's ambitie om de tempel van Sarastro te betreden) en heeft drie voortekens (Es gr.t.). Voorts wordt het allegro-gedeelte van deze ouverture nog een keer onderbroken door drie plechtige akkoorden. Denk voorts aan de *drie* dames en de *drie* knapen die verderop in de opera zingend optreden.

Bij Bach speelt het getal drie ook een grote rol als symbool van de drie-eenheid (triniteit). De grote orgelmis (het derde deel van de Clavier-Übung) wordt bijvoorbeeld besloten met een tripelfuga (d.w.z. een fuga met drie thema's) die duidelijk in drie episodes is opgezet en die drie voortekens heeft (Es gr.t.).

Omdat Bachs muziek zulke overzichtelijke patronen vertoont is wel verondersteld dat de muziek ook allerlei verborgen boodschappen en symbolen bevat; om een voorbeeld te geven: in het credo van de Hohe Messe komt in de delen Credo in unum Deum en Patrem omnipotentem het woord *credo* 7 x 7 keer voor en de frase *in unum deum* 12 x 7¹⁾.

Opmerkelijk is dat de naam BACH in het Duitse taalgebied geheel in noten kan worden omgezet: Bes – A – C – B. Dit sterk chromatische motief komt in veel van Bachs werken voor als een soort muzikale handtekening, bijvoorbeeld in de laatste – onvoltooide – tripelfuga uit de Kunst der Fuge. Verder verschijnt het in getransponeerde vorm in tal van Bachs werken, zoals als eerste thema in de vierde, vijfstemmige, fuga in boek 1 van het Wohltemperierte Klavier (WTK). De artistieke kracht van het Bach-motief

wordt wel geïllustreerd door het feit dat tal van latere componisten het hebben gebruikt, vaak als expliciete hommage aan de grote componist: Schumann, Liszt, Reger, Webern, Schönberg en anderen ²⁾).

Velen zijn op zoek geweest naar het vóórkomen van het Bach-getal 14 (dat ontstaat als Bachs naam in cijfers wordt omgezet met B=2, A=1, C=3 en H=8). Een voorbeeld: de eerste fuga waarmee het eerste boek van het WTK opent heeft 14 noten. Het tweede deel van deze fuga (na het halfslot van maat 13) omvat 14 maten waarin het thema in een dicht netwerk van stretti 14 keer voorkomt. Muzikaal lijkt mij het belangrijkste dat dit stuk, ook zonder deze numerieke analyse of welke andere analyse dan ook, als fantastische muziek wordt ervaren.

Maar ook andere componisten hebben op deze wijze hun handtekening afgegeven. Alban Berg meende dat het getal 23 een grote betekenis had in zijn leven³⁾ en in tal van zijn composities speelt het getal 23 een rol. In de Lyrische suite waarin Bergs platonische liefde voor Hanna Fuchs-Robettin zo'n rol speelt, is het aantal maten van de zes delen steeds een veelvoud van 23 en/of van 10, het getal van de geliefde Hanna. En in het derde deel wordt in maat 23 een belangrijk thema geïntroduceerd. In het vioolconcert van Berg treedt het hoofdritme voor het eerst op in maat 23 en heeft het tweede deel 230 maten. In de opera Lulu lijkt in sommige delen (akte 2 m.n.) een grote voorkeur te bestaan voor metronoomwaarden die een veelvoud van 23 zijn.

Een componist met een uitgesproken obsessie voor ritmische patronen en structuren is Olivier Messiaen. Zo bevat het slotdeel van het Livre d'orgue ("les soixante-quatre durées") notenwaarden van 64 verschillende lengtes (van tweeëndertigsten tot breves) die in twee reeksen verlopen waarbij de laagste een kreeftgang is van de hoogste, en waarbij de langste notenwaarden geleidelijk worden verkort, terwijl gelijktijdig de noten met de kortste waarden steeds worden verlengd, – een nauwkeurig mathematisch procédé dat ook nog eens fantastisch klinkt. De componist gebruikt in diverse werken complexe uit de Hindoeïstische muziek afkomstige ritmische patronen ("tala's") en smeedt deze samen tot ingenieuze constructies. Niet ten onrechte beschouwde Messiaen zichzelf vooral als "rythmécien".

Gulden snede

Een ander interessant discussiepunt is de vraag of componisten in hun werk de gulden snede hebben toegepast. In de Muziek voor snaren, slagwerk en

celesta van Béla Bartók begint het derde deel met een solo van de xylofoon op een repeterende hoge f die de progressie 1:2:3:5:8:5:3:2:1 vertoont. Ook in werken van Debussy (*Reflets dans l'eau* uit de *Six Images*) en Satie is het gebruik van de gulden snede zichtbaar.

Tot besluit

Tellen, meten, patronen ontdekken, structuren analyseren – het kan allemaal met muziek. Soms geven deze activiteiten een imponerend inzicht in de wijze waarop de componist zijn muzikale expressie heeft georganiseerd. Maar voorop blijft natuurlijk altijd het klinkend resultaat staan. De muziek moet voor zich zelf spreken en zijn kwaliteiten bij het beluisteren bewijzen. Jan Karel Lenstra is een kritische en nieuwsgierige luisteraar naar muziek; moge hij in de nu aangebroken levensfase nog vele nieuwe muziek ontdekken – *prima la musica!*

Noten

1. Kees van Houten en Marinus Kasbergen maakten het wel erg bont in hun boek “Bach en het getal” uit 1985, waarin zij tal van “Bach-getallen” weten te “ontdekken” en daaraan allerlei symbolische betekenissen verbinden.
2. Andere voorbeelden van dergelijke muzikale handtekeningen zijn frequent te vinden in het werk van Dmitri Sjostakovitsj (in de Duitse spelling begint zijn naam met de letters DSCH leidend tot het muzikaal sterke motief D-Es-C-H) of in het Kammerconcert van Alban Berg waarin de namen van Arnold Schönberg, Anton Webern en hemzelf figureren. In dit concert hebben de eerste twee delen elk 240 maten en het derde (laatste) deel 480 maten.
3. Dominique Jameux “Berg”, *Solfège/Seuil* 1980 waarin een brief van Berg aan Schönberg over dit onderwerp wordt geciteerd.